ریاضـــــــــــی عمومی

مشتق

تعریف و نمادها (Definition and Notation)	
اگر $y = f(x)$ تابعی مفروض باشد، مشتق تابع f برابر با حد $f'(x) = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ است.	اگر $y = f(x)$ باشد، تمامی عبارات زیر، مشتق تابع f در نقطه $x = a$ را نشان می‌دهند. $f'(a) = y'\|_{x=a} = \frac{df}{dx}\|_{x=a} = \frac{dy}{dx}\|_{x=a} = Df(a)$
اگر $y = f(x)$ باشد، آن‌گاه تمامی عبارات زیر معادل یکدیگر هستند: $$f'(x) = y' = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{d\big(f(x)\big)}{dx} = Df(x)$$	
بیان مشتق (Interpretation of the Derivative)	
$f'(a)$ تغییرات لحظه‌ای تابع f در نقطه $x = a$ را نشان می‌دهد.	$m = f'(a)$ اندازه شیب خط مماس بر تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = a$ را نشان می‌دهد. همچنین معادله این خط مماس برابر با $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ است.
اگر $y = f(x)$ موقعیت ذره‌ای را در زمان x نشان دهد، $f'(a)$ نشان دهنده سرعت ذره در زمان $x = a$ است.	

ویژگی‌ها و فرمول‌های مشتق (Properties and Formulas)	
$(cf)' = cf'(x)$	قانون تقسیم $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$
$(f \pm g)' = f'(x) \pm g'(x)$	$\frac{d}{dx}(c) = 0$
قانون ضرب $(fg)' = f'g + g'(x)f$	قانون توان $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
مشتق زنجیره‌ای $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$	

مشتق توابع معروف (Known functions Derivative)	
$\frac{d}{dx}(x)=1$	$\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\ \tan x$
$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$	$\frac{d}{dx}(\csc x)=-\csc x\ \cot x$
$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$	$\frac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x$
$\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$	$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}(a^x)=a^x \ln(a)$
$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x)=\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$
$\frac{d}{dx}(\log_a(x))=\frac{1}{x\ln(a)}$ آن‌گاه $x>0$ اگر	$\frac{d}{dx}(\ln(x))=\frac{1}{x}$ آن‌گاه $x>0$ اگر

مشتق‌گیری زنجیره‌ای (Chain Rule)	
$\frac{d}{dx}([f(x)^n])=n[f(x)]^{n-1}f'(x)$	$\frac{d}{dx}(\cos[f(x)])=-f'(x)\sin[f(x)]$
$\frac{d}{dx}\left(e^{f(x)}\right)=f'(x)e^{f(x)}$	$\frac{d}{dx}(\sin[f(x)])=f'(x)\cos[f(x)]$
$\frac{d}{dx}(\ln[f(x)])=\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\frac{d}{dx}(\cos[f(x)])=-f'(x)\sin[f(x)]$
$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\mathrm{f(x)}}\right)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{\mathrm{f(x)}}}$	$\frac{d}{dx}(\tan[f(x)])=f'(x)\sec^2[f(x)]$
$\frac{d}{dx}(\sec[f(x)])=f'(x)\sec[f(x)]\tan[f(x)]$	$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}[f(x)])=\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$

مشتق مراتب بالاتر (Higher Order Derivatives)

مشتق مرتبه nام تابع f به صورت زیر بیان می‌شود.

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{d\,x^n}$$

عبارت فوق برابر با تابع زیر است.

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

توجه: تابع $f^{(n-1)}(x)$، مشتق $n-1$ام تابع f است.

مشتق دوم تابع f(x) به صورت

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d^2 f}{d\,x^2}$$

بیان شده و برابر با عبارت زیر است.

$$f''(x) = (f'(x))'$$

مشتق‌گیری ضمنی (Implicit Differentiation)

به منظور مشتق‌گیری ضمنی، از هرکدام از اجزای عبارت، مشتق‌گیری می‌شود. فرض کنید هدف یافتن y' در عبارت $e^{2x-9y} + x^3y^2 = sin\,(y) + 11x$ است. به منظور انجام این کار از طرفین عبارت مذکور مشتق‌گیری شده و به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$e^{2x-9y}(2-9y') + 3x^2y^2 + 2x^3yy' = \cos y\, y' + 11$$

$$e^{2x-9y} - 9y'e^{2x-9y} + 3x^2y^2 + 2x^3yy' = \cos y\, y' + 11$$

$$(2x^3y - 9e^{2x-9y} - \cos y)y' = 11 - 2e^{2x-9y} - 3x^2y^2 \Rightarrow \left[\!\left[y' = \frac{11 - 2e^{2x-9y} - 3x^2y^2}{2x^3y - 9e^{2x-9y} - \cos y} \right]\!\right]$$

بنابراین در مشتق‌گیری ضمنی، مشتق تابع بر حسب خود و متغیرش بیان می‌شود.

صعودی، نزولی – تقعر (Increasing/Decreasing – Concave Up & Down)

نقطه بحرانی

x = c، نقطه بحرانی تابع f(x) نامیده می‌شود، در صورتی که یکی از دو شرط زیر را برآورده کند.

- $f'(c)$ برابر با صفر باشد $(f'(c) = 0)$.
- $f'(c)$موجود نباشد.

تابعِ نزولی و صعودی

- اگر در بازه I، $f'(x) > 0$ باشد، آن‌گاه تابع f در بازه مذکور صعودی است.
- اگر در بازه I، $f'(x) < 0$ باشد، آن‌گاه تابع f در بازه مذکور نزولی است.
- اگر در بازه I، $f'(x) = 0$ باشد، آن‌گاه تابع f در بازه مذکور ثابت است.

تقعر

- اگر در بازه I، $f''(x) > 0$ باشد، آن‌گاه تابع f در بازه مذکور مقعر است.
- اگر در بازه I، $f''(x) < 0$ باشد، آن‌گاه تابع f در بازه مذکور محدب است.

نقطه عطف

x = c نقطه عطف تابع f نامیده می‌شود در صورتی که جهت تقعر در آن تغییر کند. بنابراین در این نقطه، مشتق دوم برابر با صفر است $(f''(x) = 0)$.

اکسترمم، ماکزیمم و مینیمم (Extremum, Maximum and Minimum)

اکسترمم نسبی

- $x = c$، ماکزیمم نسبی تابع f است، در صورتی که به ازای تمامی مقادیر نزدیک به x = c، رابطه $f(c) \geq f(x)$ برقرار باشد.
- $x = c$، مینیمم نسبی تابع f است، در صورتی که به ازای تمامی مقادیر نزدیک به x = c، رابطه $f(c) \leq f(x)$ برقرار باشد.

اکسترمم مطلق

- $x = c$، ماکزیمم مطلق تابع f است، در صورتی که به ازای تمامی مقادیر x، رابطه $f(c) > f(x)$ برقرار باشد.
- $x = c$، مینیمم مطلق تابع f است، در صورتی که به ازای تمامی مقادیر x در دامنه، رابطه $f(c) < f(x)$ برقرار باشد.

آزمون اول مشتق

اگر x = c نقطه بحرانی تابع f باشد:

- x = c ماکزیمم نسبی است اگر در سمت چپ نقطه، $f'(x) > 0$ و در سمت راست آن، $f'(x) < 0$ باشد.
- x = c مینیمم نسبی است اگر در سمت چپ نقطه، $f'(x) < 0$ و در سمت راست آن، $f'(x) > 0$ باشد.
- x = c نه مینیمم و نه ماکزیمم است اگر علامت مشتق اول در سمت راست و چپِ x با یکدیگر مشابه باشد.

قضیه مقدار اکسترمم

اگر f(x) در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، مقادیر c و d وجود دارند به نحوی که نامساوی $a \leq c, d \leq b$ برقرار بوده و مقادیر f(c) و f(d) به ترتیب ماکزیمم و مینیمم مطلق هستند.

آزمون دوم مشتق

اگر x = c نقطه‌ای بحرانی برای تابع f باشد، در این صورت $f'(c) = 0$ بوده و عبارت‌های زیر صادق هستند.

- x = c ماکزیمم نسبی تابع f است در صورتی که $f''(c) < 0$ باشد.
- x = c مینیمم نسبی تابع f است در صورتی که $f''(c) > 0$ باشد.

یافتن اکسترمم مطلق

مراحل زیر برای یافتن مقدار مطلق تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$، انجام می‌شود.

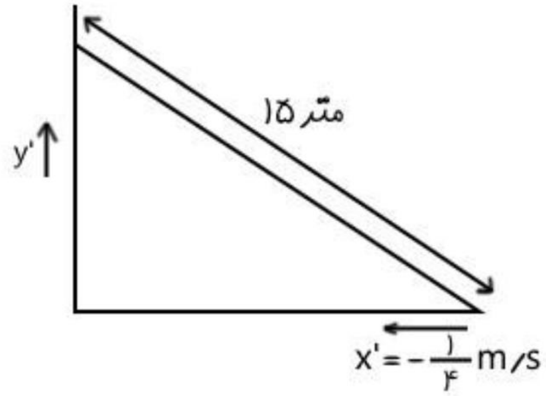
- تمامی نقاط بحرانی در بازه مذکور یافته می‌شوند.
- مقادیر f(x) در تمامی نقاط بحرانی یافته شده، محاسبه می‌شوند.
- مقادیر f(a) و f(b) محاسبه می‌شوند.
- بیشترین و کم‌ترین مقدار در مراحل ۲ و ۳ به ترتیب ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع f(x) هستند.

قضیه مقدار میانگین

اگر تابع f(a, b) در بازه [a, b] پیوسته بوده و در (a, b) مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه عددِ c در بازه $a < c < b$ وجود دارد به نحوی که در رابطه $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ صدق کند.

مثال

مطابق با شکل زیر پله‌ای به طول ۱۵ متر به دیواری تکیه داده شده است. با فرض اینکه قاعده اولیه مثلث برابر با ۱۰ متر باشد، اگر انتهای پله که روی سطح قرار داده شده با سرعت $\frac{1}{4}$ متر بر ثانیه به سمت راست کشیده شود، پس از گذشت ۱۲ ثانیه سرعت – عمودی - نوک پله چقدر است؟



با توجه به ثابت بودن طول پله، می‌توان رابطه زیر را بین y و x نوشت و از آن مشتق گرفت.

$$x^2 + y^2 = 15^2 \qquad \Longrightarrow \qquad 2xx' + 2yy' = 0$$

با توجه به رابطه سرعت-جابه‌جایی، پس از 12 ثانیه، طول قاعده مثلث برابر با $x = 10 - 12\left(\frac{1}{4}\right) = 7$ بوده، در نتیجه اندازه ارتفاع مثلث برابر است با:

$$y = \sqrt{15^2 - 7^2} = \sqrt{176}$$

با جای‌گذاری x و y در رابطه فوق، سرعت y، ۱۲ ثانیه پس از حرکت (y')، برابر است با:

$$7\left(-\frac{1}{4}\right) + \sqrt{176}y' = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y' = \frac{7}{4\sqrt{176}}$$

حد و پیوستگی

تعاریف حد (Definitions of Limit)	
تعریف دقیق (Precise Definition): حد $\lim_{x\to a} f(x) = L$ به این معنی است که به ازای هر $\epsilon > 0$ مقداری از $\delta > 0$ وجود دارد که اگر x به اندازه δ به a نزدیک شود ($\lvert x-a\rvert < \delta$)، آنگاه مقدار f(x) نیز می‌تواند در فاصله ϵ از L قرار بگیرد ($\lvert f(x)-L\rvert < \epsilon$).	**حد چپ (Left Hand Limit):** حد $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ به معنی نزدیک شدن به a از سمت مقادیر کوچک‌تر از a است.
تعریف عملیاتی (Working Definition): $\lim_{x\to a} f(x) = L$ به این معنی است که با نزدیک شدن x به a، می‌توان به هر اندازه دلخواه به L نزدیک شد.	**حد در بی‌نهایت یا ∞ (Limit at Infinity):** $\lim_{x\to \infty} f(x) = L$ حدی است که در آن با انتخاب مقادیر بی‌نهایت بزرگِ x، مقادیر f(x) به عدد L نزدیک می‌شوند.
حد راست (Right Hand Limit): حد $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ به معنی نزدیک شدن به a از سمت مقادیر بزرگ‌تر از a است.	**حد بی‌نهایت (Infinite Limit):** $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ به حدی گفته می‌شود که با نزدیک شدن x به مقدار a، مقادیر f(x)، به اعدادی بی‌نهایت بزرگ نزدیک می‌شوند.

رابطه میان حد و حدود یک طرفه (Relationship between the limit and one sided limits)	
$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = L$	$\lim_{x\to a} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$
$\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = L$ موجود نیست	

ویژگی‌های حد (Properties)	
فرض می‌شود $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ موجود، غیر صفر و c عددی ثابت باشد، در نتیجه ویژگی‌های زیر صادق است.	
$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$	$\lim_{x\to a}[cf(x)] = \lim_{x\to a} cf(x)$
$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$	$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$
$\lim_{x\to a}\left[\sqrt[n]{f(x)}\right] = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$	$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$

حد در بینهایت (Limit at Infinity)

فرض $sgn(a)=\begin{cases}1 & a>0\\ -1 & a<0\end{cases}$

n:زوج $\lim_{x\to\pm\infty} x^n=\infty$	$\lim_{x\to+\infty} e^x=\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$
n:فرد $\lim_{x\to\infty} x^n=\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} x^n=-\infty$	$\lim_{x\to\infty} ln(x)=\infty$ و $\lim_{x\to0^+} ln(x)=-\infty$
n:زوج $\lim_{x\to\pm\infty} ax^n+\dots+bx+c=sgn(a)\infty$	$\lim_{x\to\infty}\frac{b}{x^r}=0 \quad :r>0$
n:فرد $\lim_{x\to\infty} ax^n+\dots+bx+c=sgn(a)\infty$	$\lim_{x\to-\infty}\frac{b}{x^r}=0$:$r>0$ و x^r در $x<0$، حقیقی باشد
n:زوج $\lim_{x\to-\infty} ax^n+\dots+cx+d=-sgn(a)\infty$	

روش‌های رفع ابهام (Evaluation Techniques)

قاعده هوپیتال (L'Hôpital's Rule): اگر $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ یا $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ باشد، می‌توان از عبارت آمده در زیر، $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ استفاده کرد. در رابطه مذکور a می‌تواند عدد یا بینهایت باشد.

۱. اگر تابع $f(x)$ در x = a پیوسته باشد، آنگاه داریم $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

۲. فرض کنید $f(x)$ پیوسته بوده و حد $\lim_{x\to a} g(x)=b$ نیز برقرار باشد. در این صورت رابطه زیر صادق است: $\lim_{x\to a} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)=f(b)$

دو چند جمله‌ای $p(x)$ و $q(x)$ مفروض است. برای به دست آوردن حد $\lim_{n\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}$، به شرطی که حد مخرج صفر نباشد، بزرگ‌ترین توانِ صورت و مخرج در نظر گرفته می‌شوند (مثال زیر).

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-4}{5x-2x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(3-\frac{4}{x^2})}{x^2(\frac{5}{x}-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3-\frac{4}{x^2})}{(\frac{5}{x}-2)}=-\frac{3}{2}$$

به‌منظور محاسبه حد یک تابع تکه‌ای در یک نقطه، حد چپ و راست در آن نقطه محاسبه می‌شود؛ در صورت برابری آن‌ها حد در نقطه مذکور وجود دارد. برای مثال، تابع g(x) را به‌صورت زیر مفروض است

$$g(x)=\begin{cases}x^2+5 & x<-2\\ 1-3x & x\geq-2\end{cases}$$

چنانچه مشهود است، حد چپ و راست با هم برابر نیستند؛ بنابراین تابع g در نقطه x = ۲ حد ندارد.

$$\lim_{x\to-2^-} g(x)=\lim_{x\to-2^-} x^2+5=9$$

$$\lim_{x\to-2^+} g(x)=\lim_{x\to-2^+} x^2+5=7$$

۱. جهت رفع ابهام $\frac{0}{0}$ می‌توان مشابه زیر از روش فاکتورگیری استفاده کرد.

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{x^2+4x-12}{x^2-2x}\right)=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+6)}{x(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{x+6}{x}=\frac{8}{2}=4$$

۲. در $\frac{0}{0}$ های مربوط به کسرهای گنگ نیز می‌توان از فاکتورگیری استفاده کرد (مثال زیر).

$$\lim_{x\to9}\left(\frac{3-\sqrt{x}}{x^2-81}\right)=\lim_{x\to9}\frac{3-\sqrt{x}}{x^2-81}\frac{3+\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to9}\frac{9-x}{(x^2-81)(3+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to9}\frac{-1}{(x+9)(3+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to9}\frac{-1}{(18)(6)}=-\frac{1}{108}$$

توابع پیوسته (Continuous Functions)	
e^x به ازای تمام مقادیر x پیوسته است.	توابع چندجمله‌ای به ازای تمام مقادیر x پیوسته‌اند.
$Ln\, x$ به ازای $x > ۰$ پیوسته محسوب می‌شود.	توابع کسری به ازای تمام مقادیر x به جز xهایی که مخرج کسر را صفر می‌کنند، پیوسته هستند.
$sin\, x$ و $cos\, x$ به ازای تمام مقادیر x پیوسته هستند.	$\sqrt[n]{x}$ (n های فرد) به ازای تمام مقادیر x پیوسته است.
$tan\, x$ و $sec\, x$ $x \neq \cdots, -\frac{۳\pi}{۲}, -\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}, \ldots$	$\sqrt[n]{x}$ (n های زوج) به ازای مقادیر $x \geq ۰$ پیوسته است.
$cot\, x$ و $csc\, x$ $x \neq \cdots, -۲\pi, -\pi, ۰, \pi, ۲\pi\ \ldots$	

انتگرال

روش‌های انتگرال‌گیری

حاصل انتگرالی به صورت $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$ با استفاده از روش تغییر متغیر، برابر با $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$ است. در ابتدا تغییر متغیر $u = g(x)$ در نظر گرفته شده و با جایگذاری آن در انتگرال مفروض، پاسخ به دست آمده است.

فرمول استاندارد انتگرال جز به جز به صورت زیر است.

$$\int udv = uv - \int vdu$$

بنابراین، در ابتدا u و dv را شناسایی کرده و با جایگذاری آن‌ها در رابطه فوق، حاصل انتگرال محاسبه می‌شود.

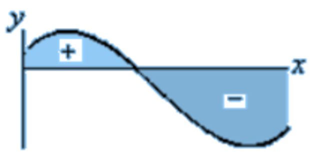
تغییر متغیر مثلثاتی

$\sqrt{b^2x^2 - a^2} \rightarrow x = \frac{a}{b}\sec\theta$	$\sqrt{a^2 - b^2x^2} \rightarrow x = \frac{a}{b}\sin\theta$
$\sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow x = a\sin\theta$	$\sqrt{a^2 + b^2x^2} \rightarrow x = \frac{a}{b}\tan\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2} \rightarrow x = a\sec\theta$	$\sqrt{a^2 + x^2} \rightarrow x = a\tan\theta$

کاربردهای انتگرال

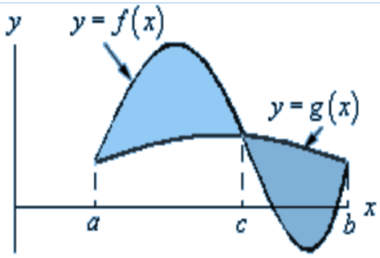
مساحت سطح

حاصل $\int_a^b f(x)\,dx$ برابر با مساحت سطح زیر نمودار تابع $f(x)$ از x = a تا x = b است. بخش قرار گرفته زیر محور x، منفی و بخش بالای محور مثبت است.

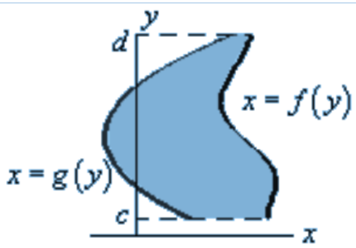


مساحت بین دو نمودار

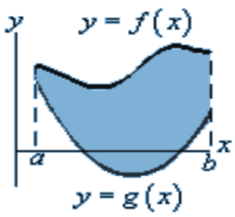
مساحت بین دو نمودار در یک بازه برابر با انتگرال اختلاف دو تابع است. اشکال زیر سه حالت مختلفِ محاسبه مساحت بین نمودار را نشان می‌دهند.



$$A = \int_a^c f(x) - g(x)\,dx + \int_c^b g(x) - f(x)\,dx$$



$$A = \int_c^d f(y) - g(y)\,dy$$



$$A = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

حجم ایجاد شده در نتیجه دوران

دو فرمول اصلی به منظور محاسبه حجم، $V = \int_a^b A(x)\, dx$ و $V = \int_a^b A(y)\, dy$ هستند. در ادامه روش‌هایی به منظور محاسبه A (مساحت) ارائه شده است.

استوانه‌ها

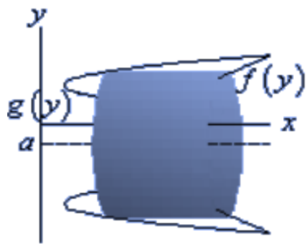
فرمول محاسبه مساحت جانبی یک استوانه برابر است با:

$A = 2\pi \times \text{شعاع} \times \text{عرض}$

حلقه‌ها

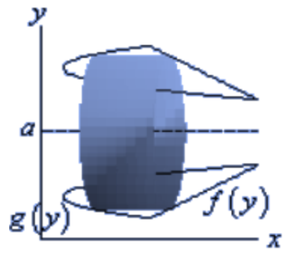
فرمول محاسبه مساحت یک حلقه با شعاع‌های داخلی و خارجی برابر است با:

$A = \pi(\text{شعاع خارجی}^2 - \text{شعاع داخلی}^2)$



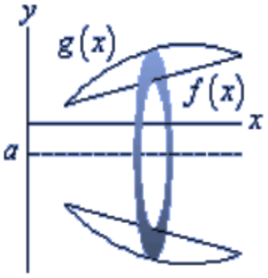
شعاع: $|a| + y$

عرض: $f(y) - g(y)$



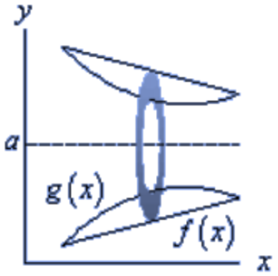
شعاع: $a - y$

عرض: $f(y) - g(y)$



شعاع خارجی: $|a| + g(x)$

شعاع داخلی: $|a| + f(x)$



شعاع خارجی: $a - f(x)$

شعاع داخلی: $a - g(x)$

کار

اگر نیروی $F(x)$ جسمی را در بازه $a < x < b$ جابه‌جا کند، کار انجام شده برابر است با:

$$w = \int_a^b F(x)\, dx$$

مقدار متوسط تابع

مقدار متوسط تابع $f(x)$ در بازه $a \le x \le b$ برابر است با:

$$F_{avg} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$$

انتگرال ناسره

انتگرال ناسره به انتگرالی گفته می‌شود که یک یا دو سر بازه انتگرال‌گیری در آن بینهایت باشد. به انتگرال ناسره‌ای که مقدار مشخصی داشته باشد، همگرا و در غیراینصورت واگرا گفته می‌شود.

حد بینهایت

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t f(x)\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\, dx$$

انتگرال ناپیوسته

اگر $\int_a^b f(x)\, dx$ در نقطه a ناپیوسته باشد، آنگاه انتگرال به صورت $\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\, dx$ محاسبه می‌شود.

اگر $\int_a^b f(x)\, dx$ در نقطه b ناپیوسته باشد، آنگاه انتگرال به صورت $\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\, dx$ محاسبه می‌شود.

تقریب انتگرال معین

انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ و عدد n مفروض است (در روش سیمپسون n بایستی فرد باشد). با استفاده از تعریف $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ و تقسیم کردن بازه $[a,b]$ به بازه‌های $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\dots,[x_{n-1},x_n]$ که در آن $x_0 = a$ و $x_n = b$ بوده، می‌توان حاصل انتگرال تابع f را در بازه مذکور با استفاده از روش‌های زیر محاسبه کرد. x_i^* نیز برابر با نقطه میانی بازه iام در نظر گرفته می‌شود.

روش نقطه میانی

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \Delta x[f(x_1^*) + f(x_2^*) + \cdots + f(x_n^*)]$$

روش ذوزنقه‌ای

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) \dots + 2f(x_{n-1}) + 2f(x_n)]$$

روش سیمپسون (Simpson's Rule)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

ویژگی‌ها، فرمول‌ها و قوانین حاکم

$\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$	$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$
$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$	$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\vert_a^b = F(b) - F(a)$ $F(x) = \int f(x)dx$
$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$	$\int_a^a f(x)\,dx = 0$
$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$	$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

انتگرال توابع چند جمله‌ای و کسری

$\int dx = x + c$	$\int kdx = kx + c$
$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, n \neq -1$	$\int \frac{1}{x}dx = ln\,\lvert x\rvert + c$
$\int x^{-n} dx = \frac{1}{1-n}x^{1-n} + c, n \neq 1$	$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}ln\,\lvert ax+b\rvert + c$
$\int x^{\frac{p}{q}} dx = \frac{1}{\frac{p}{q}+1}x^{(\frac{p}{q}+1)} + c = \frac{q}{q+p}x^{\frac{p+q}{q}} + c$	$\int (ax+b)\,dx = \frac{a}{2}x^2 + bx + c$

انتگرال توابع مثلثاتی

$\int \cos u\,du = \sin u + c$	$\int \csc u \cot u\,du = -csc\,u + c$
$\int \sin u\,du = -\cos u + c$	$\int \csc^2 u \quad du = -cot\,u + c$
$\int \sec^2 u\,du = \tan u + c$	$\int \tan u\,du = \ln\lvert \sec u\rvert + c$
$\int \sec u \tan u\,du = \sec u + c$	$\int \cot u\,du = \ln\lvert \sin u\rvert + c$
$\int \sec u\,du = \ln\lvert \sec u + \tan u\rvert + c$	$\int \sec^3 u du = \frac{1}{2}(\sec u\,tan\,u + ln\,\lvert sec\,u + tan\,u\rvert) + c$
$\int \csc u\,du = \ln\lvert \csc u - \cot u\rvert + c$	$\int \csc^3 u du = \frac{1}{2}(-\csc u\,cot\,u + ln\,\lvert csc\,u - cot\,u\rvert) + c$

انتگرال توابع لگاریتمی و نمایی

$\int e^u du = e^u + c$	$\int \ln u \, du = u \ln u - u + c$
$\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c$	$\int u e^u du = (u-1)e^u + c$
$\int \dfrac{1}{u \, lnu} du = ln \, \lvert ln \, u \rvert + c$	$\int e^{au} \sin(bu) = \dfrac{e^{au}}{a^2+b^2}(a \, sin \, (bu) - bcos \, (bu)) + c$
$\int u e^{cu} du = \dfrac{e^{cu}(cu-1)}{c^2} + c$	$\int e^{au} \cos(bu) = \dfrac{e^{au}}{a^2+b^2}(a \, cos \, (bu) + bsin \, (bu)) + c$

انتگرال توابع معکوس مثلثاتی

$\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-u^2}} du = \sin^{-1}\dfrac{u}{a} + c$	$\int \tan^{-1} u \, du = u \, tan^{-1} u - \dfrac{1}{2} ln(1+u^2) + c$
$\int \dfrac{1}{a^2+u^2} du = \dfrac{1}{a} \tan^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + c$	$\int \cos^{-1} u \, du = u \, cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + c$
$\int \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}} du = \dfrac{1}{a} \sec^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + c$	$\int \sin^{-1} u \, du = u \, sin^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + c$

انتگرال توابع هایپربولیکی

$\int \sinh u \, du = \cosh u + c$	$\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + c$
$\int \cosh u \, du = \sinh u + c$	$\int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + c$
$\int \tanh u \, du = ln \, cosh \, u + c$	$\int \operatorname{sech} u \, du = \tan^{-1}\lvert \sinh u \rvert + c$
$\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + c$	$\int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + c$

انتگرال چند تابع پرکاربرد

$\int \dfrac{1}{a^2-u^2} du = \dfrac{1}{2a} \ln \left\lvert \dfrac{u+a}{u-a} \right\rvert + c$	$\int \dfrac{1}{u^2-a^2} du = \dfrac{1}{2a} \ln \left\lvert \dfrac{u-a}{u+a} \right\rvert + c$
$\int \sqrt{a^2+u^2} \, du = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \dfrac{a^2}{2} \ln \lvert u + \sqrt{a^2+u^2} \rvert + c$	$\int \sqrt{u^2-a^2} \, du = \dfrac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \dfrac{a^2}{2} \ln \lvert u + \sqrt{u^2-a^2} \rvert + c$
$\int \sqrt{a^2-u^2} \, du = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \dfrac{a^2}{2} \sin^{-1}\dfrac{u}{a} + c$	$\int \sqrt{2au-u^2} \, du = \dfrac{u-a}{2}\sqrt{2au-u^2} + \dfrac{a^2}{2} \cos^{-1}\dfrac{a-u}{a} + c$